Das Kugelvolumen

Die Entwicklung der Formel $V = \frac{4}{3}r^3\pi$

Die Idee: Die Halbkugel wird in n Scheiben geschnitten. Die Scheiben werden als Zylinder betrachtet und deren Volumina aufsummiert. Im Grenzübergang für n gegen Unendlich geht diese Summe gegen das Halbkugelvolumen.

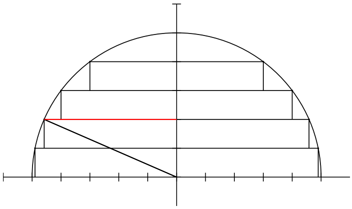

Abb. 1: Scheibenturm

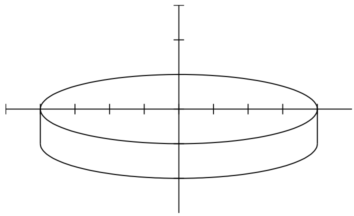

Abb. 2: i-te Scheibe

Die Scheiben haben die Höhe $\frac{r}{n}$ und der Scheibenradius ist $r_i = \sqrt{r^2 - (\frac{r \cdot i}{n})^2}$
Die i-te ($i = 1 \ldots n$) Scheibe hat das Volumen wird $s_i = \frac{r}{n} \cdot r_i^2 \cdot \pi = \frac{r}{n} \cdot \left[r^2 - (\frac{r \cdot i}{n})^2\right] \cdot \pi$.
Die rote Strecke in Abb. 1 ist der Radius der 2. Scheibe.

Der Zylinderturm mit den n Scheiben s_i hat das Volumen

$$V = \sum_{i=1}^{n} s_i \tag{1}$$

Nach dem Einsetzen von $s_i = \frac{r}{n} \cdot \left[r^2 - (\frac{r \cdot i}{n})^2\right] \cdot \pi$ folgt

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{r}{n} \cdot \left[r^2 - \left(\frac{r \cdot i}{n}\right)^2\right] \cdot \pi \tag{2}$$

Die Faktoren $\frac{r}{n}$ und π vor die Summe ziehen

$$V = \frac{r\pi}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(r^2 - \frac{r^2 \cdot i^2}{n^2}\right) \tag{3}$$

Den Faktor r^2 ausklammern und vor die Summe ziehen

$$V = \frac{r^3\pi}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right) \tag{4}$$

Den Summanden 1 und den Faktor $\frac{1}{n^2}$ vor die Summe ziehen

$$V = \frac{r^3\pi}{n} \cdot \left(n - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2\right) \tag{5}$$

Den Faktor $\frac{r^3}{n}$ in die Differenz hinein multiplizieren

$$V = \pi \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \right) \tag{6}$$

Die Summe der Quadratzahlen durch ihren Formelwert ersetzen

$$V = \pi \cdot \left[r^3 - \frac{r^3}{n^3} \cdot \left(\frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n \right) \right] \tag{7}$$

Den Faktor r^3 vor die eckige Klammer und den Faktor $\frac{1}{n^3}$ in die runde Klammer hinein multiplizieren, n^3 wird im ersten Summanden gekürzt, die beiden nächsten Summanden verschwinden für n gegen Unendlich, es verbleibt

$$V = \pi \cdot r^3 \left[1 - \frac{1}{3} \right] \tag{8}$$

Nur noch die Kugel vervollständigen

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi \tag{9}$$

q.e.d.