Das Potenzdreieck

Edgar Sänger

7. Februar 1995

Zusammenfassung

In der Literatur wird die Formel für die Summe der Potenzen der natürlichen Zahlen mit gegebenem nichtnegativem Exponenten meist nach Johannes Faulhaber unter Verwendung der Bernoullizahlen mit einigem mathematischen Aufwand entwickelt. Hier soll nun nicht nur auf Bernoulli verzichtet werden, es fallen vielmehr die Bernoullizahlen nebenbei an.

Die fünf ersten Formeln für die Summen von Potenzzahlen sind

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \sum_{i=1}^{n} i^0 & = & \frac{1}{1}n^1 \\
\textit{(Natürliche Zahlen)} & \sum_{i=1}^{n} i^1 & = & \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\
\textit{(Quadratzahlen)} & \sum_{i=1}^{n} i^2 & = & \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
\textit{(Kubikzahlen)} & \sum_{i=1}^{n} i^3 & = & \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{0}{1}n \\
\textit{(Biqudratzahlen)} & \sum_{i=1}^{n} i^4 & = & \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{0}{1}n^2 - \frac{1}{30}n
\end{array}
$$

Für beliebige nichtnegativ-ganzzahlige Exponenten kann verallgemeinert werden

$$\sum_{k=1}^{n} k^e = a_0 n^{e+1} + a_1 n^e + \ldots + a_{e-1} n^2 + a_e n$$

dabei gilt für die Koeffizienten a_i

$$a_i = \frac{\binom{e}{i} - \sum_{m=0}^{i-1} a_m \binom{e+1-m}{i+1-m}}{e+1-i}$$

Hier die ersten Werte:

	Koeffizienten a_i												
e	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1/1												
1	1/2	1/2											
2	1/3	1/2	1/6										
3	1/4	1/2	1/4	0									
4	1/5	1/2	1/3	0	-1/30								
5	1/6	1/2	5/12	0	-1/12	0							
6	1/7	1/2	1/2	0	-1/6	0	1/42						
7	1/8	1/2	7/12	0	-7/24	0	1/12	0					
8	1/9	1/2	2/3	0	-7/15	0	2/9	0	-1/30				
9	1/10	1/2	3/4	0	-7/10	0	1/2	0	-3/20	0			
10	1/11	1/2	5/6	0	-1	0	1	0	-1/2	0	5/66		
11	1/12	1/2	11/12	0	-11/8	0	11/6	0	-11/8	0	5/12	0	
11	1/13	1/2	1/1	0	-11/6	0	22/7	0	-33/10	0	5/3	0	-691/2730

Die rechte Kante dieses Dreiecks sind die Bernoullizahlen!

Nun soll die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^e = \sum_{e=0}^{i} a_e n^{i+1-e}$$

mit

$$a_i = \frac{\binom{e}{i} - \sum_{m=0}^{i-1} a_m \binom{e+1-m}{i+1-m}}{e+1-i}$$

bewiesen werden.

Es gelten:

$$
\begin{aligned}
\binom{e}{i} &= \sum_{m=0}^{i-1} a_m \binom{e+1-m}{i+1-m} + a_i \binom{e-i+1}{1} \\
\binom{e}{i} &= \sum_{m=0}^{i-1} a_m \binom{e+1-m}{i+1-m} + a_i \binom{e+1-m}{i+1-m} \\
a_{i-1} + \binom{e}{i} &= \sum_{m=0}^{i} a_m \binom{e+1-m}{i+1-m} + a_{i+1} \binom{e+1-(i+1)}{i+1-m} \\
&= \sum_{m=0}^{i+1} a_m \binom{e+1-m}{i+1-m} \\
\left[a_{i+1} + \binom{e}{i}\right] n^{e-i} &= n^{e-i} \sum_{m=0}^{i+1} a_m \binom{e+1-m}{i+1-m} \\
\sum_{i=0}^{e-1} \left[a_{i+1} + \binom{e}{i}\right] n^{e-i} &= \sum_{i=0}^{e-1} n^{e-i} \sum_{m=0}^{i+1} a_m \binom{e+1-m}{i+1-m}
\end{aligned}
$$

Für $i = e$ gilt

$$
\begin{aligned}
a_i &= \frac{\binom{e}{e} - \sum_{m=0}^{e-1} a_m \binom{e+1-m}{i+1-m}}{e-e+1} \\
&= 1 - \sum_{m=0}^{e-1} a_m
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\sum_{m=0}^{e} a_m = 1
$$

Es gilt

$$
a_0 n^{e+1} + \sum_{i=0}^{e-1} \left[a_{i+1} \binom{e}{i}\right] n^{e-i} + 1 = a_0 n^{e+1} + \sum_{i=0}^{e-1} \left[a_{e-i} \sum_{m=0}^{i+1} a_m \binom{e+1-m}{i+1-m}\right] + \sum_{m=0}^{e} a_m
$$

Linke Seite =

$$
\begin{array}{llllllllll}
a_0 n^{e+1} + \left[a_1 + \binom{e}{0}\right] n^e + \left[a_2 + \binom{e}{1}\right] n^{e-1} + \cdots + \left[a_{e-1} + \binom{e}{e-2}\right] n^2 + \left[a_e + \binom{e}{e-1}\right] n + 1 \\
= \\
a_0 n^{e+1} + & a_1 n^e & + & a_2 n^{e-1} & + \cdots + & a_{e-1} n^2 & + & a_e n & \\
+ & \binom{e}{0} n^e & + & \binom{e}{1} n^{e-1} & + \cdots + & \binom{e}{e-2} n^2 & + & \binom{e}{e-1} n & +1
\end{array}
$$

$$= \sum_{i=0}^{e} a_i n^{e+1-i} + (n+1)^e$$

Rechte Seite =

$$a_0 n^{e+1} + \sum_{i=0}^{e-1} n^{e-i} \textstyle\sum_{m=0}^{i+1} a_m \binom{e+1-m}{i+1-m} + \displaystyle\sum_{m=0}^{e} a_m$$

=

$$a_0 n^{e+1} + n^e \sum_{m=0}^{1} a_m \tbinom{e+1-m}{1-m} + n^{e-1} \sum_{m=0}^{2} a_m \tbinom{e+1-m}{2-m} + \cdots + n^2 \sum_{m=0}^{e-1} a_m \tbinom{e+1-m}{e-1-m} + n \sum_{m=0}^{e} a_m \tbinom{e+1-m}{e-m} + \sum_{m=0}^{e} a_m$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
a_0 \binom{e+1}{0} n^{e+1} & + a_0 \binom{e+1}{1} n^e & + a_0 \binom{e+1}{2} n^{e-1} & + a_0 \binom{e+1}{3} n^{e-2} & + \cdots & + a_0 \binom{e+1}{e-1} n^2 & + a_0 \binom{e+1}{e} n + & a_0 \\
 & + \ a_1 \binom{e}{0} n^e & + \ a_1 \binom{e}{1} n^{e-1} & + \ a_1 \binom{e}{2} n^{e-2} & + \cdots & + a_1 \binom{e}{e-2} n^2 & + a_1 \binom{e}{e-1} n + & a_1 \\
 & & + a_2 \binom{e-1}{0} n^{e-1} & + a_2 \binom{e-1}{1} n^{e-2} & + \cdots & + a_2 \binom{e-1}{e-3} n^2 & + a_2 \binom{e-1}{e-2} n + & a_2 \\
 & & & & \vdots & & & \\
 & & & & & + a_{e-1} \binom{2}{0} n^2 & + a_{e-1} \binom{2}{1} n & + a_{e-1} \\
 & & & & & & + \ a_e \binom{1}{0} n & + \ a_e
\end{array}$$

$$= a_0 (n+1)^{e+1} + a_1 (n+1)^i + a_2 (n+1)^{e-1} + \cdots + a_{e-1} (n+1)^2 + a_e (n+1)$$

$$= \sum_{i=0}^{e} a_i (n+1)^{e+1-i}$$

Setze linke Seite = rechte Seite:

$$= \sum_{i=0}^{e} a_i n^{e+1-i} + (n+1)^e = \sum_{i=0}^{e} a_i (n+1)^{e+1-i}$$

Dies ist aber gerade der Induktionsschluß n $\rightarrow$ n+1:

$$\sum_{k=1}^{n} k^e = \sum_{i=0}^{e} a_i n^{e+1-i} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^i + (n+1)^i = \sum_{i=0}^{e} a_i (n+1)^{e+1-i}$$

Der Induktionsanfang für n=1 : $\displaystyle\sum_{i=0}^{e} a_i = 1$ ist vorstehend gezeigt.